MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 2
30.10.2019

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I" -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Wir formulieren die Verneinung der Aussage wie folgt:

$$\exists x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0 \text{ mit } \ x^2 \leq y^2 \ \wedge \ x > y$$

(Das Wörtchen „mit" können wir auch durch einen Doppelpunkt ersetzen, oder auch ganz weglassen.)

b) Die Aussage ohne die Einschränkung lautet

$$A: \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ gilt: } x^2 \leq y^2 \Longrightarrow x \leq y.$$

(Auch hier könnten wir das Wörtchen „gilt" auch durch einen Doppelpunkt ersetzen, oder wieder auch auch ganz weglassen.)
Diese Aussage ist falsch, da wir ein Gegenbeispiel finden können. Zum Beispiel betrachten wir $x = 0, y = -1$, dann gilt

$$x^2 = 0 \leq 1 = y^2,$$

aber es ist

$$0 > -1.$$

Damit gilt die Verneinung obiger Aussage A, also

$$\neg A: \quad \exists x, y \in \mathbb{R} \ \text{ mit } \ x^2 \leq y^2 \ \wedge \ x > y.$$

also ist die Aussage A falsch.

c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$ beliebig. Es gilt

$$(a-b)^2 \geq 0,$$

was sich mit Hilfe der binomischen Formeln zu

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

umformen läßt. Wir können auf beiden Seiten $4ab$ addieren und erhalten

$$a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab.$$

Dies ist unter Benutzung einer binomischen Formel äquivalent zu

$$4ab \leq (a+b)^2.$$

Wegen $4ab \geq 0$ können wir dies auch schreiben als

$$(\sqrt{4ab})^2 \leq (a+b)^2.$$

Nun können wir $(*)$ benutzen, da sowohl $\sqrt{4ab} \geq 0$ als auch $a + b \geq 0$; es folgt

$$\sqrt{4ab} \leq a + b$$

was sich wegen $\sqrt{4ab} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{ab} = 2\sqrt{ab}$ auch so schreiben läßt

$$2\sqrt{ab} \leq a + b,$$

woraus

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}$$

folgt. Dies war zu beweisen.

[Diese Schlußkette könnten wir auch etwas knapper so aufschreiben (mit „Satz“ zitieren wir die entsprechenden wahren Aussagen aus der Vorlesung nach Beispiel 1.13):

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 \geq 0 &\overset{\text{Satz a)}}{\Longrightarrow} a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\
&\overset{\text{Satz b)}}{\Longrightarrow} a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \\
&\overset{\text{Satz a)}}{\Longrightarrow} (a+b)^2 \geq 4ab \\
&\overset{4ab \geq 0}{\Longrightarrow} (\sqrt{4ab})^2 \leq (a+b)^2 \\
&\underset{\sqrt{4ab} \geq 0,\ a+b \geq 0}{\overset{(*)}{\Longrightarrow}} \sqrt{4ab} \leq a + b \\
&\overset{\text{Rechnen mit Wurzeln}}{\Longrightarrow} 2\sqrt{ab} \leq a + b \\
&\overset{\text{Satz c)}}{\Longrightarrow} \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.
\end{aligned}$$
]

2. a) Sei $z \in \mathbb{Z}$ und gelte $A(z)$, d.h. z ist ungerade. Wir müssen zeigen, daß $B(z)$ wahr ist.

   Weil z ungerade, gibt es nach Definition 1.14 der Vorlesung eine ganze Zahl k, so daß $z = 2k + 1$. Nun können wir einfach das Quadrat von z ausrechnen:

$$z^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\in \mathbb{Z}}) + 1$$

   Also läßt sich auch z^2 in der Form $z^2 = 2l + 1$ mit $l \in \mathbb{Z}$ schreiben, wobei hier $l = 2k^2 + 2k$ ist. Also ist z^2 ungerade. Somit ist $B(z)$ wahr und die Aussage bewiesen.

   b) In diesem indirekten Beweis zeigen wir die zu $\forall z \in \mathbb{Z} : [B(z) \implies A(z)]$ äquivalente Aussage

$$\forall z \in \mathbb{Z} :\ [\neg A(z) \Longrightarrow \neg B(z)]\,.$$

   Sei also $z \in \mathbb{Z}$ und es gelte $\neg A(z)$, also ist z nicht ungerade, und damit gerade. Wir müssen zeigen, daß $\neg B(z)$ wahr, also z^2 gerade ist.

   Weil z gerade, existiert nach Definition 1.14 ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = 2k$. Quadrieren ergibt

$$z^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(\underbrace{2k^2}_{\in \mathbb{Z}}).$$

   Nach Definition 1.14 ist damit z^2 gerade, also $\neg B(z)$ wahr, und damit die Aussage bewiesen.

3. a) Wir formalisieren die Aussagen wie folgt:

$$P: \quad \forall x \in M\ \exists y \in S : V(x,y)$$

$$Q: \quad \exists y \in S\ \forall x \in M : V(x,y)$$

b) Beginnen wir mit der Frage, ob P hinreichend für Q ist, das heißt, ob $P \Longrightarrow Q$. Dies ist **falsch**. Wenn jeder Mensch mindestens eine Sprache versteht, kann man daraus nicht schließen, daß es eine Sprache gibt, die alle verstehen. (Man könnte sich zum Beispiel vorstellen, daß jeder Mensch nur seine eigene Sprache hat, die er mit niemandem teilt, dann gilt Q sicher nicht.)

Umgekehrt ist aber P notwendig für Q, d.h. $Q \Longrightarrow P$ ist **wahr**. Wenn es eine Sprache gibt, die jeder einzelne Mensch versteht, so versteht ja jeder Mensch auch mindestens eine Sprache (diese Universalsprache eben) und P ist erfüllt.

c) Wir negieren die Aussagen:

$$\neg P : \exists x \in M\ \forall y \in S : \neg V(x,y)$$

Sprachlich: Es gibt (mindestens) einen Menschen, der keine Sprache versteht.

$$\neg Q : \forall y \in S\ \exists x \in M : \neg V(x,y)$$

Sprachlich: Für jede Sprache gibt es mindestens einen Menschen, der sie nicht versteht. Oder auch: Es gibt keine Sprache, die jeder Mensch versteht.

d) Diese Aufgabe können wir auf zwei Weisen lösen, zum einen durch erneutes Nachdenken: Die Aussage $(\neg Q \Longrightarrow \neg P)$ ist falsch, also ist $\neg P$ nicht notwendig für $\neg Q$, denn es kann genau wie oben z.B. der Fall sein, daß jeder seine eigene Sprache spricht, aber es keine Universalsprache gibt.

Demgegenüber ist die Aussage $(\neg P \Longrightarrow \neg Q)$ wahr, also ist $\neg P$ hinreichend für $\neg Q$, denn wenn es einen Menschen (sagen wir, er heißt Anton) gibt, der keine einzige Sprache versteht, dann gibt es natürlich zu jeder Sprache einen Menschen (nämlich Anton), der sie nicht versteht.

Die schnellere Methode ist das Ausnutzen der bekannten Äquivalenzregeln für die Implikation. Da gilt:

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$$

sowie

$$(Q \Longrightarrow P) \Longleftrightarrow (\neg P \Longrightarrow \neg Q),$$

ist sofort aus Teilaufgabe b) ersichtlich, daß $(\neg Q \Longrightarrow \neg P)$ falsch und $(\neg P \Longrightarrow \neg Q)$ wahr ist.

4. a) Es ist

$$\begin{aligned}
X \cap Y &= \{2\}\\
X \cup Y &= \{1,2,3\}\\
X \setminus Y &= \{1\}\\
X \times Y &= \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}\\
\mathcal{P}(X \times Y) &= \Big\{\varnothing, \{(1,2)\}, \{(1,3)\}, \{(2,2)\}, \{(2,3)\},\\
&\quad \{(1,2),(1,3)\}, \{(1,2),(2,2)\}, \{(1,2),(2,3)\}, \{(1,3),(2,2)\}, \{(1,3),(2,3)\}, \{(2,2),(2,3)\},\\
&\quad \{(1,2),(1,3),(2,2)\}, \{(1,2),(1,3),(2,3)\}, \{(1,2),(2,2),(2,3)\}, \{(1,3),(2,2),(2,3)\}, X \times Y\Big\}.
\end{aligned}$$

(Die Potenzmenge hat 16 Elemente.)

b) i) Wir zeigen:

$$A \cup B = \{1,5,7,9\} \iff x = 1 \ \wedge \ a = 9.$$

Beweis von „$\Longleftarrow$“: Gelte $x = 1$ und $a = 9$. Dann ist $A = \{9,1,1\} = \{1,9\}$, und $B = \{1,5,7\}$, also nach Definition der Vereinigungsmenge $A \cup B = \{1,5,7,9\}$. ✓

Beweis von „$\Longrightarrow$“: Gelte $A \cup B = \{1,5,7,9\}$ Nach Definition der Vereinigungsmenge gilt

$$A \cup B = \{a, x, x^2, 1, 5, 7\}$$

Da diese Menge gleich der Menge $\{1,5,7,9\}$ ist, muß insbesondere für x gelten, daß $x \in \{1,5,7,9\}$ und $x^2 \in \{1,5,7,9\}$. Wir können nun alle Möglichkeiten durchprobieren:

- $x = 9$ geht nicht, da $9^2 = 81 \notin \{1,5,7,9\}$.
- $x = 7$ geht nicht, da $7^2 = 49 \notin \{1,5,7,9\}$.
- $x = 5$ geht nicht, da $5^2 = 25 \notin \{1,5,7,9\}$.

Damit bleibt nur $x = 1$ übrig. Es ist dann $x^2 = x = 1 \in \{1,5,7,9\}$, und $A \cup B = \{a,1,5,7\} = \{1,5,7,9\}$. Also muß $a = 9$ sein.

ii) Behauptung: $A \subset B$ ist genau dann wahr, wenn $x = 1$ und $a \in \{1,5,7\}$, also

$$A \subset B \iff x = 1 \ \wedge \ a \in \{1,5,7\}.$$

Beweis von „$\Longleftarrow$“: Gelte $x = 1$ und $a \in \{1,5,7\}$. Dann ist $B = \{1,5,7\}$ und $A = \{a, 1, 1^2\} = \{a, 1\}$; man sieht sofort, daß für $a \in \{1,5,7\}$ die Teilmengenbeziehung $A \subset B$ erfüllt ist. ✓

Beweis von „$\Longrightarrow$“: Gelte $A \subset B$, also müssen alle Elemente von A auch in B enthalten sein. Da $1 \in A$, muß also $1 \in B$ gelten, was genau dann möglich ist, wenn $x = 1$. In diesem Fall haben wir also $A = \{a,1,1\} = \{a,1\}$ und $B = \{1,5,7\}$, also ist wegen $A \subset B$ dann auch $a \in B = \{1,5,7\}$. ✓